模块三 数列拔高题型

第 1 节 奇偶数列问题—求和篇（★★★☆）

强化训练

1．（2023 • 新疆乌鲁木齐模拟 • ★★）若数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}2n-1,n为奇数\\(\sqrt{2})^n,n为偶数\end{cases}$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=$______.（用具体数值作答）

答案：2236

解析：$\{a_n\}$的通项是按奇偶分段的，故求和时，按奇数项、偶数项分组求，

由题意，$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=1+5+9+\cdots+37$

$=\dfrac{10\times(1+37)}{2}=190$，

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^4+(\sqrt{2})^6+\cdots+(\sqrt{2})^{20}$

$=\dfrac{2\times(1-2^{10})}{1-2}=2^{11}-2=2046$，

所以$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=190+2046=2236$.

2．（2023 •湖北武汉模拟 •★★★）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-1)^n(n^2-n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，前 n 项和为S_n，则$S_{40}=$______.

答案：800

解析：通项中有$(-1)^n$这种结构，求和时可尝试将相邻的两项组合，不失一般性，下面先算$a_{2n-1}+a_{2n}$，

$a_{2n-1}+a_{2n}=(-1)^{2n-1}[(2n-1)^2-(2n-1)]+(-1)^{2n}[(2n)^2-2n]=-(4n^2-6n+2)+(4n^2-2n)=4n-2$，

所以$S_{40}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{39}+a_{40})=2+6+10+\cdots+78=\dfrac{20\times(2+78)}{2}=800$.

3．（★★）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$.

（1）求a_4，a_6；

（2）求S_{100}.

解：(1)（已知a_2，可直接代递推式求a_4和a_6）

因为$a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$，所以$\begin{cases}a_4-a_2=2\\a_6-a_4=2\end{cases}$，

又$a_2=2$，所以$a_4=2+a_2=4$，$a_6=2+a_4=6$.

（2）（递推式含 $(-1)^n$，考虑奇偶分类．先看 n 为偶数时，由（1）的结果可猜测 $\{a_n\}$ 的偶数项成等差数列）

当 n 为偶数时，$a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ 即为 $a_{n+2}-a_n=2$，所以 $a_2,a_4,a_6,\cdots$ 构成首项和公差都为 2 的等差数列，

故 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{100}=50\times2+\dfrac{50\times49}{2}\times2=2550$；

当 n 为奇数时，$a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$ 即为 $a_{n+2}-a_n=0$，所以 $a_{n+2}=a_n$，又 $a_1=1$，所以 $\{a_n\}$ 的奇数项全为 1；

故 $S_{100}=(a_1+a_3+\cdots+a_{99})+(a_2+a_4+\cdots+a_{100})=50+2550=2600$.

4.（2022·华侨、港澳台联考·★★★）设 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差不为 0 的等差数列，且 a_1，a_2，a_6 成等比数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=(-1)^n a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，由题意，$a_1=1$，又 a_1，a_2，a_6 成等比数列，所以 $a_2^2=a_1a_6$，

从而 $(1+d)^2=1+5d$，解得：$d=3$ 或 0（舍去），故 $a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$.

（2）由题意，$S_n=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^n a_n$，

（通项涉及 $(-1)^n$ 这一结构，考虑相邻两项组合求前 n 项和，是否恰好分完由 n 的奇偶决定，故讨论）

当 n 为偶数时，$S_n=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{n-1}+a_n)=\dfrac{n}{2}\times3=\dfrac{3n}{2}$；

当 n 为奇数时，$S_n=S_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{3(n+1)}{2}-(-1)^{n+1}a_{n+1}=\dfrac{3n+3}{2}-(3n+1)=\dfrac{1-3n}{2}$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}\dfrac{3n}{2},n\text{为偶数}\\ \dfrac{1-3n}{2},n\text{为奇数}\end{cases}$.

5.（2022·重庆模拟·★★★★）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$2(S_n-n+2)=a_{n+1}$，且 $a_2=10$，$b_n=a_n-1$.

（1）证明：$\{b_n\}$ 是等比数列；

（2）设 $c_n=\begin{cases}b_n,n=2k\\ \dfrac{1}{\log_3 b_n\cdot\log_3 b_{n+2}},n=2k-1\end{cases}$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n+1$ 项和 T_{2n+1}.

解：（1）（要证的是 $\{a_n-1\}$ 为等比数列，故由所给的 a_n 和 S_n 混搭关系式退 n 相减，消 S_n）

因为 $2(S_n-n+2)=a_{n+1}$，所以当 $n\geq2$ 时，$2[S_{n-1}-(n-1)+2]=a_n$，

两式相减得：$2(S_n-n+2)-2[S_{n-1}-(n-1)+2]=a_{n+1}-a_n$，所以 $2a_n-2=a_{n+1}-a_n$，故 $a_{n+1}=3a_n-2$，

（上面得到 $a_{n+1}=3a_n-2$ 的过程进行了“退 n”，故该式只在 $n\geq2$ 时成立，$n=1$ 是否成立需单独判断）

在 $2(S_n-n+2)=a_{n+1}$ 中取 $n=1$ 可得 $2(S_1+1)=a_2$，所以 $2(a_1+1)=a_2$，结合 $a_2=10$ 可得 $a_1=4$，

经检验，满足 $a_2=3a_1-2$，所以 $a_{n+1}=3a_n-2$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，

（要由此证明 b_n 为等比数列，只需证 $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}$ 为常数，先由上述递推式凑出 $a_{n+1}-1$ 这一结构）

所以 $a_{n+1}-1=3a_n-2-1=3(a_n-1)$ ①，又 $a_1-1=3\neq 0$，结合式①可得数列 $\{a_n-1\}$ 的所有项均不为 0，

故式①可化为 $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_n-1}=3$，即 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=3$，所以 $\{b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列.

（2）由（1）可得 $b_n=b_1\cdot 3^{n-1}=3\times 3^{n-1}=3^n$，所以 $c_n=\begin{cases}3^n, n=2k\\ \dfrac{1}{\log_3 3^n\cdot\log_3 3^{n+2}}, n=2k-1\end{cases}=\begin{cases}3^n, n=2k\\ \dfrac{1}{n(n+2)}, n=2k-1\end{cases}$，

（c_n 按奇偶分段，故求和时也可考虑按奇数项和偶数项分组求和）

$c_2+c_4+\cdots+c_{2n}=3^2+3^4+\cdots+3^{2n}=\dfrac{9(1-9^n)}{1-9}=\dfrac{9^{n+1}-9}{8}$，当 n 为奇数时，$c_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，

所以 $c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2n+1}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})=\dfrac{n+1}{2n+3}$，

故 $T_{2n+1}=c_1+c_2+\cdots+c_{2n+1}=(c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2n+1})+(c_2+c_4+\cdots+c_{2n})=\dfrac{n+1}{2n+3}+\dfrac{9^{n+1}-9}{8}$.

【反思】像 $a_{n+1}=3a_n-2$ 这种递推公式，是否要求 $n\geq 2$，并不由下标是否出现 $n-1$ 决定，而是由推出该式的条件中 n 的范围决定. 例如本题退 n 得到的 $2[S_{n-1}-(n-1)+2]=a_n$ 要求 $n\geq 2$，那么由此推出的 $a_{n+1}=3a_n-2$ 即使下标没有出现 $n-1$，仍然只在 $n\geq 2$ 时成立，$n=1$ 是否成立还需单独判断.